Primer parcial MA2112. Tipo A

Enero-Marzo 2007.
Resolución realizada por: Osmar Betancourt
Carné: 16-10130. @BetancourtOsmar

<u>Resolución</u>

Pregunta 1. Considere $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + yx & \text{si} \quad x < y \\ 2 & \text{si} \quad x \geq y \end{cases}$

$a.)$ ¿Es continua en $(1,1)$?

Para ello, grafiquemos y observemos la Figura 1

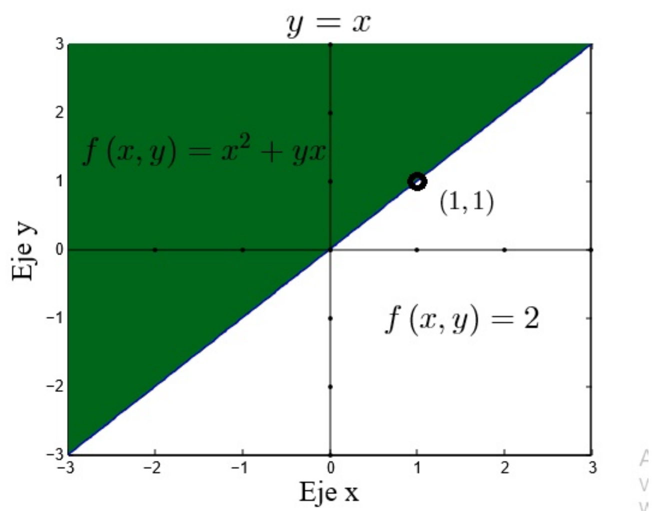

Figura 1: regiones delimitadas por $y = x$

Si nos aproximamos por una recta de pendiente $m = 1$ estaremos en una sola región, planteamos los dos casos:

$$\text{Si } m = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} 2 = 2$$

Si $m \neq 1 \Rightarrow$ entonces la recta de pendiente m por la cual nos estamos aproximando pasará por las dos regiones en donde hay un cambio de imagen en nuestra función y se deben estudiar las dos posibilidades:

$$\text{Obtenemos: } \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2 + yx & = & 2 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 2 & = & 2 \end{cases}$$

Tenemos un posible valor del límite, ahora debemos de usar la definición formal del límite para encontrar un delta en función de epsilon.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\;\; 0 < ||(x,y)-(x_0,y_0)|| < \delta\,,\; |f\,(x,y)-L| < \varepsilon$$

$$0 < ||\,(x,y)-(1,1)\,|| < \delta\,/|x^2+yx-2| < \varepsilon$$

Hacemos los cambios $y=(y-1)+1$ y $x=(y-1)+1$

$$\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta \Rightarrow |x-1| < \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow |y-1| < \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

Procedamos a manipular algebraicamente la expresión para poder acotar.

$$\left|[(x-1)+1]^2+[(x-1)+1]\,[(y-1)+1]-2\right| =$$
$$\left|(x-1)^2+2\,(x-1)+1+(x-1)\,(y-1)+(x-1)+(y-1)+1-2\right|$$

$$\left|(x-1)^2+3\,(x-1)+(x-1)\,(y-1)+(y-1)\right| < |x-1|^2+3\,|x-1|+|x-1|\,|y-1|+|y-1|$$

Lo cual se puede reinterpretar como lo siguiente:

$$\delta^2+3\delta+\delta^2+\delta < \varepsilon \Rightarrow 2\delta^2+4\delta < \varepsilon$$

$\therefore$ el lím $\exists$ y vale 2.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f\,(x,y) = f\,(1,1) = 2$$

Y por ende la función es continua en $(1,1)$

b.) ¿Es diferenciable en $(1,1)$?

Veamos si las derivadas parciales existen. Ya que en $(1,1)$ dependiendo de cómo nos aproximemos tendremos un cambio de imagen en nuestra función, es por ello que debemos de plantear las dos posibles imágenes y por ende proceder a aplicar la definición de la derivada parcial y tendremos dos límites:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(1,1) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+(1+h)\,(1)-2}{h} & = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2+h}{h} = 3 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2-2}{h} & = \displaystyle\lim_{h\to 0} 0 = 0 \end{cases}$$

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial x}\nexists$, por ende podemos concluir que f no es diferenciable en $(1,1)$.

c.) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1,1)$

Calculemos la derivada direccional mediante el uso de su definición. Sabemos que al aproximarnos de una u otra forma al punto $(1,1)$ estaremos entre dos regiones en las cuales hay un cambio de imagen de la función, así que debemos de evaluar los límites laterales:

$$Df_{(1,1)}\overrightarrow{u} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\left(1+\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2}{t} & = \quad \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t}{t\sqrt{2}} + \dfrac{t^2}{2t} + \dfrac{2t}{t\sqrt{2}} + \dfrac{t^2}{2t} = 2\sqrt{2} \\ \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2-2}{t} & = \quad \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0 \end{cases}$$

$0 \neq 2\sqrt{2} \therefore$ el límite $\nexists$ y no hay derivada direccional.

Pregunta 2. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = f(g(u(x,y)) - v(x,y))$ con $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = x + y$. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\dfrac{\partial h}{\partial x}(-1,1) = 3$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(-1,1) = -9$, $g(-1) = 0$ y $f'(0) = 3$. Calcule el valor de $g'(-1)$

Derivando la expresión de la función h compuesta de las otras obtendremos:

$$Dh = Df\,(DgDu - Dv)$$

$Dh(-1,1) = \begin{bmatrix} 3 & -9 \end{bmatrix}$. $u(-1,1) = -1 \Rightarrow g(-1) = 0$. Evaluando
$v(-1,1) = 0 \Rightarrow f(0-0) = f(0) \Rightarrow f'(0) = 3$

Calculemos $Du(-1,1)$ y $Dv(-1,1)$:

$$Du(-1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } Dv(-1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 \end{bmatrix} = (3)\left((g'(-1))\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Aplicamos la propiedad distributiva de las matrices y luego las restamos.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3g'(-1) - 3 & -3g'(-1) - 3 \end{bmatrix}$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 = 3g'(-1) - 3 \\ -9 = -3g'(-1) - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 3g'(-1) \\ 6 = 3g'(-1) \end{cases} \Rightarrow g'(-1) = 2$$

Pregunta 3. Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x,y) = e^x y + x + y^2$ que es paralelo al plano $x + 2y - z = 0$.

Lo primero que debemos de hacer es definir una nueva función de tres variables: $F(x,y,z) \equiv e^x y + x + y^2 - z = 0$ Calculamos ∇F

$$\nabla F = \begin{pmatrix} e^x y + 1 \\ e^x + 2y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que el vector director o normal a un plano son los coeficientes que acompañan a la variable (si está la ecuación del plano de forma explícita).

$$\Rightarrow \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si dos vectores son paralelos significa que uno es combinación lineal del otro, por lo cual tendremos lo siguiente:

$$\Rightarrow k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x y + 1 \\ e^x + 2y \\ -1 \end{pmatrix} \text{ con } k \in \mathbb{R} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \begin{cases} e^x y + 1 = 1 \Rightarrow e^x y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ e^x + 2y = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = ln\,(2) \end{cases}$$

Ya tenemos el punto, evaluemos $f\,(ln\,(2)\,,0) = ln\,(2)$ y $\nabla f\,(ln\,(2)\,,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow z = ln\,(2) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - ln\,(2) \\ y - 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow z = ln\,(2) + x - ln\,(2) + 2y \Rightarrow z = x + 2y$$

Pregunta 4. Determine los valores extremos locales de $f\,(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la bola cerrada $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Hallamos ∇f, al ser una función polinómica, sus puntos críticos serán aquellos en donde la primera derivada sea $\overrightarrow{0}$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0} \text{ , Donde observamos que } \nabla f \text{ nunca se hace } \overrightarrow{0}$$

De modo que debemos de analizar el comportamiento de la función en la frontera. Para ello usaremos multiplicadores de Lagrange, con la función $g\,(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \text{ Por el teorema de Lagrange, sabemos que este vector será paralelo a } \nabla f$$

$$\Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2x} \\ 2y\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{y} \\ 2z\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2x} = -\frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 2x \end{cases}$$

Sustituimos en $g\,(x, y, z)$: $x^2 + 4x^x + 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$, sustituimos para hallar los valores restantes.

Si $x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{2}{3} \Rightarrow P1 = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

Si $x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}$, $z = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow P2 = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

Finalmente, al evaluar los puntos tenemos: $f\,(P1) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = 3$ y $f\,(P2) = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3} = -3$.

Por lo cual f alcanza un máximo en $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ y un mínimo en $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

Notificar en caso encontrar algún error.

Osmar Betancourt
16-10130@usb.ve

Resolución revisada por el prof. Humberto Valera.